

Interpolacja krzywych w systemach CAD

Opracowanie

Janusz Wach

Wstęp

Grafika komputerowa wykorzystywana w programach CAD jest oparta na geometrii analitycznej i różniczkowej a wszystkie operacje i przekształcenia figur geometrycznych potrzebne do ich wyświetlania i manipulowania w przestrzeni odbywają się w sferze obliczeń analitycznych.

W geometrii analitycznej punkty przestrzeni Euklidesowej reprezentowane są trójką liczb rzeczywistych (x, y, z) , stanowiących ich współrzędne kartezjańskie w pewnym arbitralnie obranym układzie odniesienia. Dowolną krzywą można przedstawić parametrycznie¹, trójką funkcji $x(t), y(t), z(t)$ zależnych od parametru t przyjmującego wartości z zamkniętego przedziału $a \leq t \leq b$. Funkcje te dla ustalonego t reprezentują jeden punkt krzywej.

Analogicznie parametryczna reprezentacja powierzchni dana jest trójką funkcji $x(u, v), y(u, v)$ i $z(u, v)$ zależnych od dwóch parametrów u oraz v . Powierzchnie można traktować, jako ciągle zbiory krzywych², bo dla ustalonego jednego parametru trójka tych funkcji opisuje krzywą sparametryzowaną przez drugi parametr np. dla $v = \text{const}$ krzywe parametryzuje u lub odwrotnie. Fragment powierzchni wydzielony przez położonym na niej łańcuchem krzywych (zwanym krawędziami) nazywa się płatem (licem). Bryła jest zbiorem płatów połączonych wzdłuż krawędzi, które wydzielą z przestrzeni jakiś obszar przestrzenny (3D) a każda krawędź należy do dwóch lic.

W geometrii planarnej (2D) trójki funkcji reprezentujące punkty redukują się do par funkcji a wśród figur geometrycznych występują jedynie krzywe (inaczej linie) oraz figury płaskie.

Jak wynika z powyższego, krzywe mają istotne znaczenie przy modelowaniu figur geometrycznych. W geometrii zdefiniowano dziesiątki krzywych [3] opisanych analitycznie, ale uwzględnienie ich wszystkich przez oprogramowanie CAD jest niemożliwe, bo ich liczba jest niezliczona. Podobnie niezliczona jest liczba krzywych opisujących rzeczywiste obiekty. Takie krzywe na ogół trzeba aproksymować krzywymi wyznaczonymi przez szereg punktów zwanych węzłami.

¹ Przedstawienie parametryczne nie jest jedynym sposobem na reprezentowanie krzywych i powierzchni, ale w grafice komputerowej jest najwygodniejsze.

² Na przykład powierzchnia walcowa (cylindryczna) jest zbiorem wszystkich prostych równoległych do pewnej prostej zwanej *tworzącą* przecinających pewną krzywą zwaną *kierownicą*.

Wobec powyższego zaistniała potrzeba stworzenia uniwersalnego sposobu reprezentacji dowolnych krzywych wygodnego do implementacji komputerowej oraz pozwalającego na intuicyjne operowanie krzywą przez użytkownika oprogramowania. Problem ten rozwiązali niezależnie od siebie francuscy inżynierowie Pierre Bézier (Renault) oraz Paul de Casteljau (Citroën). Opracowane przez nich krzywe zostały nazwane od nazwiska pierwszego krzywymi Béziera a nazwiskiem drugiego nazwano algorytm służącego do ich rysowania. Krzywe te stały się z podstawą do stworzenia bardziej uniwersalnych krzywych zwanych krzywymi B-sklejanymi wykorzystywanymi do reprezentowania dowolnych krzywych w systemach graficznych w tym i kształtów czcionek (np. fontów TrueType).

W systemach CAD reprezentacja krzywych ma charakter mieszany. Dla krzywych podstawowych takich jak prosta, okrąg, elipsa stosuje się parametryzację standardową wynikającą z definicji danej krzywej, natomiast wszystkie pozostałe są opisywane krzywymi B-sklejanym, które definiowane są stosunkowo niewielkim zbiorem punktów. Dlatego zarówno programista jak i użytkownik systemu CAD ma zwykle do dyspozycji repertuar krzywych ograniczony do odcinka (prostej), okręgu (łuku), elipsy (łuku eliptycznego) oraz krzywej B-sklejanej zwanej popularnie splajnem.

Interpolacja krzywymi B-sklejanymi

W systemach CAD do interpolacji krzywej \mathbf{k} zadanej szeregiem N punktów węzłowych $\mathbf{A}_i \in \mathbf{k}$, gdzie $i \in [0, N - 1]$ stosuje się tzw. krzywe *B-sklejane* (*b-spline*) zwane zwyczajowo *splajnami*. Krzywa B-sklejana jest łańcuchem połączonych ze sobą krzywych Béziera tak dobranych by przechodziły gładko przez zadany ciąg punktów \mathbf{A}_i zwany w systemach CAD *punktami edycji* (Solid Edge) lub *dopasowania* (AutoCAD).

Krzywe Béziera

Krzywe Béziera stopnia n są zdefiniowane zbiorem punktów:

$$\mathbf{P}_i = (x_i, y_i), \text{ gdzie } i \in [0, n]$$

zwanych *punktami kontrolnymi* lub *Béziera*. Są to krzywe wielomianowe a ich stopień n jest o jeden mniejszy o liczby punktów wynoszących $n + 1$. Punkt \mathbf{P}_0 pokrywa się z pierwszym punktem krzywej Béziera zaś \mathbf{P}_n z ostatnim. Parametryczne równanie krzywej Béziera ma postać:

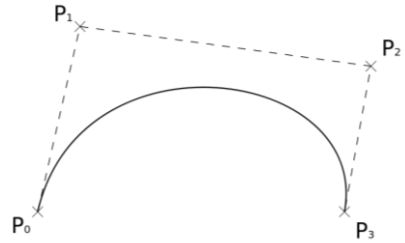
$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t). \quad (1)$$

$B_i^n(t)$ jest *bazowym wielomianem Bernsteina*, a t jest parametrem o wartościach $t \in [0, 1]$. Dalsze rozważania dotyczą przypadku płaskiego $\mathbf{p}(t) = [x_p(t), y_p(t)]$, ale z łatwością można je rozszerzyć na krzywe przestrzenne po dołączeniu współrzędnej $z_p(t)$.

Zgodnie z tym, co podano wcześniej $\mathbf{p}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{p}(1) = \mathbf{P}_n$ a ponadto odcinek $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ jest styczny do krzywej w punkcie \mathbf{P}_0 natomiast odcinek $\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_n$ jest styczny do niej w punkcie \mathbf{P}_n . Pozostałe punkty, stanowiące wraz z pierwszym i ostatnim tzw. *łamaną kontrolną* (lub *łamaną Béziera*), określają kształt krzywej, ale do niej nie należą.

Gdyby potraktować wzór na $\mathbf{p}(t)$, jako równanie trajektorii punktu, w którym parametr t reprezentuje czas, to w punkcie \mathbf{P}_0 wektor prędkości dany byłby wzorem $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)n$ a w punkcie \mathbf{P}_n wzorem $\mathbf{v}_n = (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})n$. Z tego wynika, że krańcowe odcinki łamanej kontrolnej reprezentowały by wektory prędkości w skali $1:n$.

Krzywe Béziera zwykle 2 lub 3 stopnia są stosowane szeroko w programach do projektowania inżynierskiego CAD, tworzenia grafiki wektorowej (Corel Draw, Inkscape), do reprezentowania kształtów znaków w fontach komputerowych (TrueType), w systemach przetwarzania grafiki (PostScript) oraz w grafice wektorowej (np. format SVG).



Rys.1. Krzywa Béziera stopnia 3

Bazowe wielomiany Bernsteina

Bazowe wielomiany Bernsteina stopnia n , zwane w grafice komputerowej *wielomianami Bernsteina*, zdefiniowane są następująco

$$B_i^n(t) := \begin{cases} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} & \text{dla } i \in [0, n] \wedge t \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } i \notin [0, n] \vee t \notin [0, 1] \end{cases} \quad (2)$$

Górne wyrażenie w tym wzorze zawiera dwumian Newtona, co wprost prowadzi do wzoru (3) tzw. rozkładu jedynek. Wielomiany te mają następujące własności:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1 \quad (3)$$

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad (4)$$

$$B_i^n(t) \geq 0 \quad (5)$$

$$B_i^n(t) = (1-t)B_{n-i}^n(t) \quad (6)$$

Wzór (4) określa rekurencyjny sposób wyznaczania wielomianów a wzór (6) mówi o ich symetrii, co jest skutkiem obecności symbolu Newtona we wzorze (2). Wzory (3) oraz (5) są warunkami koniecznymi i dostatecznymi dla własności otoczki wypukłej krzywych Béziera. Ponadto dzięki własności rozkładu jedynek (3) *przebieg krzywych Béziera dla danego zestawu wielomianów Bernsteina nie zależy od wyboru układu współrzędnych*, w którym przedstawione są punkty kontrolne. Wielomiany Bernsteina są liniowo niezależne. Dla ustalonej wartości

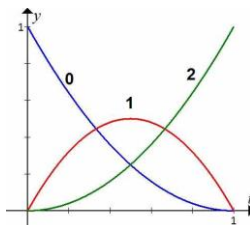
n w rodzinie jest $n + 1$ wielomianów, co stanowi bazę przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż n . Wielomiany te zostały wprowadzone w 1912 roku przez Siergieja Bernsteina w dowodzie twierdzenia Weierstrassa o przybliżeniu funkcji ciągłych. Jako przykład, niżej pokazane są rodziny wielomianów Bernsteina stopnia $n = 2$ oraz $n = 3$.

$n = 2$

$$B_0^2(t) = (1 - t)^2 = t^2 - 2t + 1$$

$$B_1^2(t) = 2t(1 - t) = -2t^2 + 2t$$

$$B_2^2(t) = t^2$$



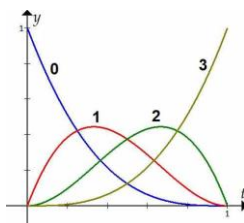
$n = 3$

$$B_0^3(t) = (1 - t)^3 = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$$

$$B_1^3(t) = 3t(1 - t)^2 = -3t^3 + 3t$$

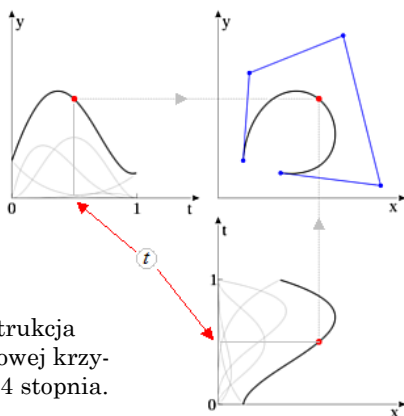
$$B_2^3(t) = 3t^2(1 - t) = -3t^3 + 3t^2$$

$$B_3^3(t) = t^3$$



Rys.2. Przykładowe rodziny wielomianów Bernsteina

Na rys.3. zademonstrowano graficzną konstrukcję dwuwymiarowej krzywej Béziera 4 stopnia na podstawie funkcji $x(t), y(t)$ utworzonych na bazie wielomianów Bernsteina.



Rys.3. Konstrukcja dwuwymiarowej krzywej Béziera 4 stopnia.

Kolorem niebieskim zaznaczono punkty i łamaną kontrolną, szarym narysowane są wykresy wielomianów bazowych Bernsteina a czarnym krzywe reprezentujące funkcje współrzędnych powstałe przez przemnożenie współrzędnych punktów kontrolnych przez wielomiany Bernsteina. Liczba wierzchołków łamanej kontrolnej jest zawsze o jeden większa od stopnia wielomianu Bernsteina i tym samym od stopnia krzywej Béziera.

Płaską krzywą Béziera $\mathbf{p}(t) = [x_p(t), y_p(t)]$ trzeciego stopnia, zwaną inaczej kubiczną krzywą Béziera, zadaną czterema punktami kontrolnymi $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0), \dots, \mathbf{P}_3 = (x_3, y_3)$ można opisać następującym układem równań:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + x_0 \\ y_p(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + y_0 \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} c_x &= 3(x_1 - x_0), \\ b_x &= 3(x_2 - x_1), \\ a_x &= x_3 - x_0 - c_x - b_x, \\ c_y &= 3(y_1 - y_0), \\ b_y &= 3(y_2 - y_1), \\ a_y &= y_3 - y_0 - c_y - b_y. \end{aligned} \quad (7b)$$

Algorytm de Casteljau

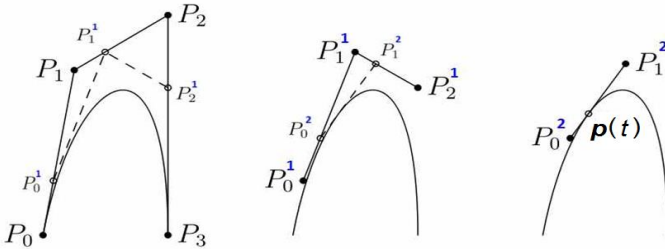
Algorytm opracowany przez Paula de Casteljau, służy do geometrycznego wyznaczenia punktów wielomianowej krzywej Béziera. Niech łamana kontrolna definiująca krzywą Béziera stopnia n jest zadana przez $K = n + 1$ wierzchołków $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ a parametr $t \in [0, 1]$. Liczba wierzchołków łamanej kontrolnej jest zawsze o jeden większa od stopnia krzywej.

Aby określić punkt $\mathbf{p}(t)$ tej krzywej dla zadanej wartości t trzeba zrealizować szereg kroków, podczas których każdy odcinek łamanej (rys.4) jest dzielony w stosunku $t : (1 - t)$ przez umieszczenie na nim pośredniego punktu \mathbf{P}_j^k spełniającego warunek

$$|\mathbf{P}_j^{k-1} \mathbf{P}_j^k| = |\mathbf{P}_j^{k-1} \mathbf{P}_{j+1}^{k-1}| t.$$

Indeks górny k jest numerem kroku (zero lub jego brak oznacza punkty kontrolne) a j numerem wierzchołka w danym kroku. Ostatecznie wynikiem wykonania każdego kroku jest wyznaczenie nowej

łamanej o jeden segment i jeden wierzchołek krótszej. W kolejnym kroku nową łamaną dzieli się w ten sam sposób i proces powtarzany jest do chwili, aż łamana zredukuje się do jednego punktu $\mathbf{p}(t)$, który będzie szukanym punktem krzywej Béziera dla zadanego t .



Rys.4. Algorytm de Casteljau dla krzywej Béziera 3 stopnia.

Cały proces wymagający wykonania n kroków nazywa się *procedurą obcinania narożników*. Algorytm ten pozwala też podzielić krzywą Béziera na mniejsze fragmenty, z których każdy może być traktowany osobno.

Własności krzywych Béziera

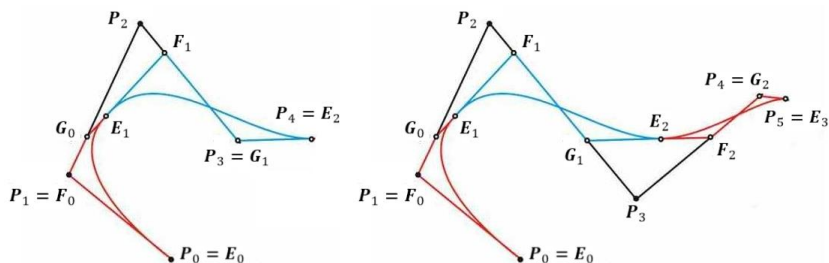
Krzywe Béziera, oprócz wymienionych już wcześniej, posiadają jeszcze następujące własności:

1. Krzywa jest prostą wtedy i tylko, gdy jej punkty kontrolne są współliniowe.
2. Krzywa może być podzielona w dowolnych jej punktach na szereg sekcji, z których każda też będzie krzywą Béziera.
3. Krzywa Béziera stopnia $n > 2$ może przecinać samą siebie lub mieć ostrze dla niektórych układów punktów kontrolnych.
4. Punkty kontrolne nie mają charakteru lokalnego, co oznacza, że jakakolwiek zmiana punktu kontrolnego wymaga ponownego przeliczenia krzywej i tym samym wpływa na wygląd całej krzywej. Ty niemniej im dalej od zmienianego punktu kontrolnego, tym mniejszy jest jego wpływ na przebieg krzywej.
5. Krzywą Béziera stopnia n określoną punktami kontrolnymi $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ da się zastąpić inną krzywą Béziera stopnia $n + 1$ z odpowiednio dobranymi punktami kontrolnymi $\mathbf{P}'_0, \dots, \mathbf{P}'_{n+1}$.

6. Niektórych krzywych np. okręgu nie da się przedstawić dokładnie za pomocą krzywych Béziera³. Tym nie mniej przy zachowaniu pewnych warunków można je interpolować łańcuchem łączonych krzywych stopnia $n \geq 3$ z dokładnością lepszą od 0.1%.

Krzywe B-sklejane

Krzywa B-sklejana $s(t)$ stopnia n powstaje z połączenia M krzywych Béziera tego samego stopnia n , tak by w punktach łączenia miała miejsce równość pochodnych łączonych segmentów aż do rzędu $n - 1$, tzw. ciągłość C^{n-1} . Dla przypadku najczęściej stosowanego $n = 3$ ma miejsce ciągłość C^2 , czyli ciągłość samej krzywej (brak przerw) wynikająca z warunku łączenia się segmentów, ciągłość pierwszej pochodnej, czyli warunek styczności decydujący o gładkości krzywej (braku ostrzy) i ciągłość drugiej pochodnej (ciągłość krzywizny), która nie daje efektu wizualnego jak poprzednie ciągłości.



Rys.5. Schemat składania krzywej B-sklejanej z krzywych Béziera i związki między punktami kontrolnymi obu krzywych. Krzywe Béziera wyróżniono naprzemiennie kolorami czerwonym i niebieskim.

Wybierana zwykle wartość $n = 3$ jest kompromisem między odpowiednio niską złożonością obliczeniową wymaganą przy rysowaniu i manipulowaniu krzywymi a odpowiednio wysoką dokładnością reprezentowania krzywej interpolowanej.

Krzywa B-sklejana jest, podobnie jak krzywa Béziera, kontrolowana łamaną składającą się z K punktów P_0, P_1, \dots, P_{K-1} , zwanych punktami *de Boora*, z których tylko pierwszy i ostatni się z nią pokrywa.

Punkty kontrolne krzywej B-sklejanej i krzywych Béziera, które są jej składowymi nie są tożsame. Na rys.5. pokazano relacje jakie

³ Tej wady nie mają tzw. wymierne krzywe Béziera.

występują między nimi dla przypadku $n = 3$. Cztery kolejne punkty kontrolne krzywych Béziera oznaczono symbolami: $\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i, \mathbf{E}_{i+1}$. Pokrycie ma miejsce tylko między dwoma pierwszymi ($\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}_0, \mathbf{P}_1 = \mathbf{F}_0$) i dwoma ostatnimi punktami ($\mathbf{P}_{K-1} = \mathbf{E}_M, \mathbf{P}_{K-2} = \mathbf{G}_{M-1}$), czyli tylko pierwszy i ostatni odcinek łamanej kontrolnej krzywej B-sklejanej pokrywa się z odpowiednimi odcinkami łamanej kontrolnej krzywych Béziera. Pozostałe punkty kontrolne \mathbf{P}_i są punktami przecięcia przedłużonych odcinków łamanej kontrolnej Béziera z segmentu poprzedzającego $\mathbf{F}_{i-2}\mathbf{G}_{i-2}$ i z segmentu następującego $\mathbf{F}_{i-1}\mathbf{G}_{i-1}$ – taki dobór jest jednoznaczny.

Analityczne przedstawienie krzywych B-sklejanych

Niech będzie dany arbitralnie przyjęty ciąg liczb u_i zwanych węzłami spełniającymi warunek $u_i \leq u_{i+1}$ dla $0 \leq i \leq m$, gdzie $m = M + 2n + 1$ a M jest liczbą segmentów krzywych Béziera. Ponieważ jest to ciąg niemalejący, więc niektóre węzły mogą się powtarzać i wtedy zwane są one *węzłami wielokrotnymi*. Wartości u_i mogą być dowolne, ale zwykle przyjmuje się $u_0 = 0$ oraz $u_m = 1$.

Krzywa B-sklejana $\mathbf{s}(t)$ stopnia n określona łamaną kontrolną $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ dana jest równaniem (8) podobnym do równania (1) krzywej Béziera:

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{i=0}^{m-n-1} \mathbf{P}_i N_i^n(t) \quad \text{dla } t \in [u_n, u_{m-n}]. \quad (8)$$

Funkcje $N_i^n(t)$ zwane są *unormowanymi⁴ funkcjami B-sklejanymi* stopnia n .

$$\begin{aligned} N_i^0(t) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \text{dla } t \notin [u_i, u_{i+1}) \end{cases} \\ N_i^n(t) &= \frac{t - u_i}{u_{i+n} - u_i} N_i^{n-1}(t) + \frac{u_{i+n+1} - t}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(t) \quad \text{dla } n > 0 \\ N_i^n(t) &= 0, \quad \text{gdy } (u_{i+n+1} - u_i) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Funkcje te definiuje się za pomocą ilorazu różnicowego obciętych funkcji potęgowych, ale ze względu na ich skomplikowaną i nieporęczną formę, w praktyce stosuje się równoważny, rekurencyjny wzór (9)

⁴ Słowo unormowane zwykle się pomija.

Mansfielda–de Boora–Coxa. Dla krzywej otwartej $u_0 = u_1 = \dots = u_n$ oraz $u_{m-n} = \dots = u_{m-1} = u_m$.

Węzły wielokrotne powodują pojawianie się ostrzy (nieciągłość stycznej) w krzywej B-sklejanej, co czasami może być efektem pożądanym. W szczególnym przypadku po zredukowaniu liczby węzłów u_i tylko do dwóch o krotności $n + 1$ funkcje N_i^m stają się tożsame z wielomianami Bernsteina, stąd krzywe B-sklejane można uważać za uogólnienie krzywych Béziera.

Algorytm wyznaczania krzywej B-sklejanej trzeciego stopnia

Podana na początku procedura otrzymywania punktów kontrolnych krzywej B-sklejanej z punktów Béziera prezentuje tylko ogólną ideę. Droga w drugą stronę, czyli wyznaczenie punktów Béziera na podstawie łamanej kontrolnej krzywej B-sklejanej, tak jak to ma miejsce podczas projektowania, nie jest jednoznaczna. W przypadku krzywej B-sklejanej 3 stopnia do otrzymania punktów kontrolnych segmentów Béziera (E_i, F_i, G_i, E_{i+1}) stosuje się następujący algorytm.

1. Najpierw wyznacza się rosnący ciąg węzłów u_i , gdzie $0 \leq i \leq m$ oraz $m = M + 2n + 1$ takich, że $u_i < u_{i+1}$.
2. Następnie oblicza się długości przedziałów $h_i = u_{i+1} - u_i$ wyznaczanych przez węzły.
3. Kolejne punkty dla $i = 0 \dots m - 1$ oblicza się wg poniższych zależności:

$$\begin{aligned} F_0 &= P_1 \\ G_0 &= \frac{h_1}{h_0 + h_1} P_1 + \frac{h_0}{h_0 + h_1} P_2 \end{aligned} \quad \text{dla } i = 0$$

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{h_i + h_{i+1}}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} P_{i+1} + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} P_{i+2} \\ G_i &= \frac{h_{i+1}}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} P_{i+1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} P_{i+2} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{dla} \\ i \in [1, m - 2] \end{array}$$

$$\begin{aligned} F_{m-1} &= \frac{h_{m-1}}{h_{m-1} + h_{m-2}} P_m + \frac{h_{m-2}}{h_{m-1} + h_{m-2}} P_{m+1} \\ G_{m-1} &= P_{m+1} \end{aligned} \quad \text{dla } i = m - 1$$

4. Po wyznaczeniu punktów F_i i G_i punkty E_i oblicza się ze wzorów:

$$E_0 = P_0$$

$$E_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} G_i + \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} F_{i+1} \quad \text{dla } i \in [0, m-2]$$

$$E_m = P_{m+2}$$

5. Ostatecznie punkty kontrolne segmentów Béziera wyznaczają czwórki punktów E_i, F_i, G_i, E_{i+1} dla $i \in [0, m-1]$.

Uwaga. Jeśli węzły u_i dzielą przedział $[0, 1]$ na równe części (wówczas $h_i = 1/m$), to taka krzywa jest określana jako **jednorodna/równomierna** (*uniform*). Dla krzywych jednorodnych ułamki w powyższych wzorach upraszczają się i reprezentowane są stałymi 1/2, 1/3 i 2/3. Jeśli węzły dzielą przedział nierównomiernie, to krzywa jest nazywana **niejednorodna/nierównomierna** (*non-uniform*) jak np. krzywe NURBS (*Non-Uniform Rational B-Spline*).

Własności krzywych B-sklejanych

Krzywe B-sklejane mają następujące własności:

1. Reprezentacja krzywych jest niezależna od położenia i orientacji układu współrzędnych, w którym wyrażone są punkty kontrolne.
2. Afiniczne⁵ przekształcenie krzywej realizuje się przekształcając afinicznie tylko jej punkty kontrolne.
3. Punkty kontrolne wpływają lokalnie na kształt krzywej a nie globalnie jak w przypadku krzywej Béziera.

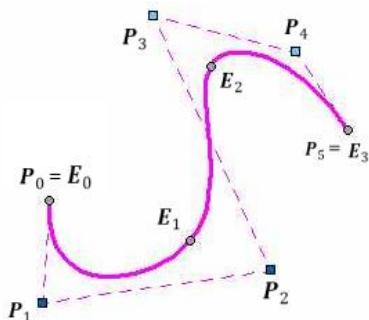
Rysowanie krzywych B-sklejanych w systemach CAD

W Solid Edge do rysowania krzywych B-sklejanych zwanych tam po prostu krzywymi służy polecenie **Krzywa** dostępne w środowisku szkicownika. Krzywą (rys.6.) prowadzi się podając kolejne węzły linii interpolowanej E_i , które wg nomenklatury programu zwane są punktami edycji – to przez nie przechodzi krzywa.

Po wywołaniu polecenia w opcjach polecenia wybiera się stopień n krzywej. Standardowo proponowana jest wartość 3, ale można ją zmieniać w granicach 2 – 10. Do narysowania krzywej bez względu na

⁵ Przekształcenia afiniczne są to przekształcenia zachowujące współliniowość punktów. Zaliczają się do nich: skalowanie osiowe, ścinanie oraz izometrie (zachowujące kąty) takie jak przesunięcie, obrót, jednokładność, symetrie osiowe i środkowe.

jej stopień trzeba określić co najmniej 3 punkty edycji E_i . Po narysowaniu krzywej można ją edytować i służy do tego ten sam pasek polecenia, który był używany podczas jej tworzenia. Nie ma możliwości narysowania krzywej przez podawanie tylko jej punktów kontrolnych P_i jak to ma miejsce np. w AutoCADzie.



Rys.6. Krzywa (splajn) w edytorze SE. E_i – punkty edycji, P_i – punkty kontrolne (de Boora)

Po zaznaczeniu krzywej ujawniane są wszystkie punkty – kontrolne i edycji. Wszystkie z nich można przeciągać w nowe położenie zmieniając w ten sposób kształt krzywej. Liczbę punktów kontrolnych można zmienić przez zmianę stopnia krzywej w opcjach polecenia. Po podwyższeniu stopnia krzywa zachowuje swój kształt, ale po obniżeniu już nie. Punkty edycji można dodawać i usuwać bez zmiany kształtu krzywej. Przytrzymując ALT można dodać nowy punkt klikając w dowolne miejsce na krzywej inne od widocznych punktów edycji, albo usunąć punkt edycji klikając w niego. Alternatywnie można użyć przycisku paska **Dodaj/Usuń punkty**.

Jeśli oznaczy się: K – liczba punktów kontrolnych; n – stopień wielomianu oraz W – liczba punktów edycji, to liczba punktów kontrolnych dla krzywych tworzonych w SE wynosi

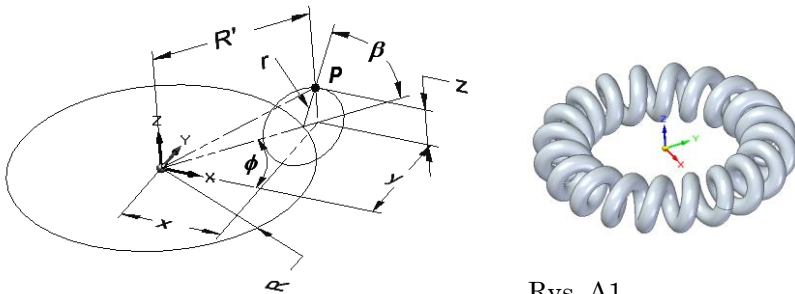
$$K = \begin{cases} n + 1 & \text{dla } n \leq 3 \\ W + 2 + (W - 1)(n - 3) & \text{dla } n > 3 \end{cases}$$

Wielkość $n + 1$ jest w SE zwana rzędem funkcji sklejanej.

Praktyczne przykłady

Spirala toroidalna

Równanie spirali owiniętej na torusie. Spirala taka jest zakreślana przez punkt P znajdujący się na obwodzie okręgu o promieniu r wirującym ze stałą prędkością kątową ω_s i którego środek porusza się po torze kołowym o promieniu R umieszczonym w środku układu na płaszczyźnie XY . Środek wirującego okręgu okrąży tor z prędkością kątową ω_z (wokół osi Z) a wektor ω_s jest styczny do toru.



Rys. A1.

Biorąc pod uwagę, że kąty ϕ i β są liniowo zależne od parametru t oraz uwzględniając zależności wynikające z rys. A1

$$\begin{aligned} \phi &= \omega_z t, & \beta &= \omega_s t, & R' &= R + r \cos \beta \\ x &= R' \cos \phi, & y &= R' \sin \phi, & z &= r \sin \beta \end{aligned}$$

równanie spirali owiniętej na torusie wyraża się następująco

$$\begin{aligned} x(t) &= (R + r \cos \omega_s t) \cos \omega_z t, \\ y(t) &= (R + r \cos \omega_s t) \sin \omega_z t, \\ z(t) &= r \sin \omega_s t. \end{aligned}$$

Parametry ω_z oraz ω_s można dobrać dowolnie, ale warunkiem na to by otrzymać krzywą zamkniętą jest wykonanie przez punkt P pewnej liczby n pełnych obrotów, w czasie pełnego okrążenia toru, czyli by $\omega_s/\omega_z = n$. Dodatkowym założeniem będzie znormalizowanie parametru do zakresu $t \in [0, 1]$, gdzie wartość 0 oznacza początek krzywej a 1 jej koniec. Niech $\Omega = \omega_z t$ oznacza kąt zakreślony przez środek ruchomego okręgu wokół osi Z w czasie t . Jeśli założy się, że kąt ten jest

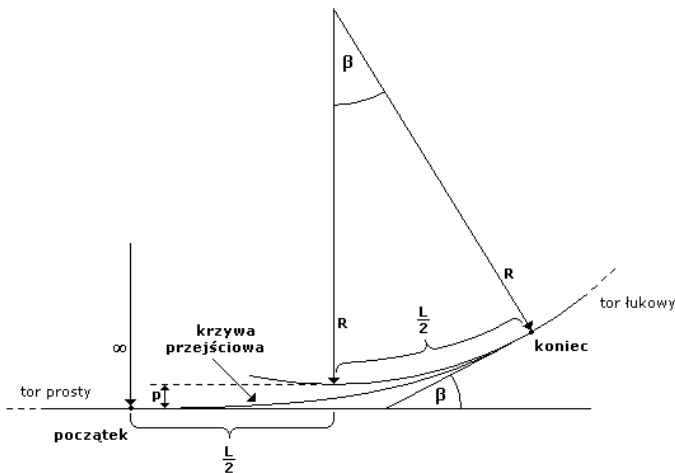
osiągany dla $t = 1$, to $\omega_z = \Omega$ a $\omega_s = n\Omega$ i wtedy równanie spirali o n pełnych zwojach owiniętej na kącie Ω obwodu koła dane jest układem

$$\begin{aligned}x(t) &= (R + r \cos n\Omega t) \cos \Omega t, \\y(t) &= (R + r \cos n\Omega t) \sin \Omega t, \\z(t) &= r \sin n\Omega t.\end{aligned}$$

Dla wartości $\Omega = 2\pi$ spirala będzie zamknięta a dla wartości mniejszych otwarta. Punkt startowy dla $t = 0$ jest w położeniu $(R + r, 0, 0)$. Aby rozpocząć rysowanie spirali od innego położenia, to wszystkie wystąpienia $n\Omega t$ należy zastąpić wyrażeniem $(n\Omega t + \psi)$, a wystąpienia Ωt wyrażeniem $(\Omega t + \varphi)$, gdzie $\psi, \varphi \in [0, 2\pi]$ są kątami początkowymi. Kąt ψ określa położenie początkowe P na małym kole a φ położenie początkowe środka małego koła na kole dużym. Zmianę kierunku skręcenia spirali uzyska się zmieniając znaki stałych ω_s i ω_z .

Krzywa dla toru pojazdu

Łuk poziomy dla toru pojazdu składa się z łuku o stałym promieniu oraz krzywych przejściowych na początku i końcu łuku, stosowanych w celu uniknięcia gwałtownych zmian przyspieszenia odśrodkowego proporcjonalnego do kwadratu krzywizny $\kappa = 1/r$, gdzie r – promień koła ściśle stycznego do toru w danym punkcie.



Rys. A2

W czasie przejazdu pojazdu z odcinka prostego na łuk lub odwrotnie następuje skokowy przyrost lub spadek przyspieszenia odśrodkowego. Aby tego uniknąć, stosuje się krzywą przejściową (*klotoida*⁶ zwana *spiralą Cornu* lub *Eulera* ang. *Euler spiral*⁷) o liniowo (proporcjonalnie do łuku) zmiennej krzywiznie. Schemat krzywej przejściowej przedstawiony jest na rys. A2. Kąt zwrotu krzywej przejściowej β , jest kątem łuku o długości $L/2$ i promieniu R . Parametr p wynosi:

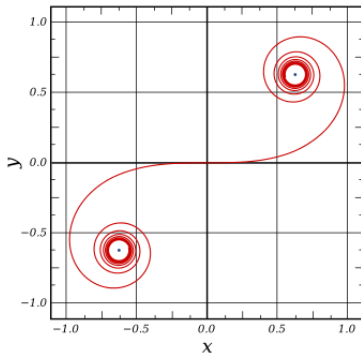
$$p = L^2 / (6R) - R (1 - \cos \beta).$$

Równanie parametryczne klotoidy $\mathbf{k}(t) = [x(t), y(t)]$ dane jest wzorami całkowymi

$$x(t) = a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt$$

$$y(t) = a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2} dt$$

Gdzie: a – współczynnik wyrażający proporcjonalność krzywizny $\kappa = s / a^2$ od długości łuku s zaś $t = s / (a\sqrt{\pi})$.



Rys.A3. Klotoida.

⁶ <https://pl.wikipedia.org/wiki/Klotoida>

⁷ https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_spiral

Stosowane konwencje matematyczne

Symbole literowe zmiennych zapisywane są kursywą. Czcionkę pogrubioną stosuje się do oznaczania punktów i wektorów a niepogrubioną do skalarów. Wielkimi literami alfabetu łacińskiego **A**, **B** ..., **P** ... oznacza się punkty przestrzeni reprezentowanymi trójką lub parą współrzędnych kartezjańskich, czyli np. $\mathbf{A} = (x_A, y_A, z_A)$ lub $\mathbf{P} = (x_P, y_P)$. Małymi literami i czcionką pogrubioną **p**, **q**, **r** ... oznacza się krzywe. Indeksy przy współrzędnych są nazwami punktów lub krzywych. Operacje dodawania, odejmowania i mnożenia są realizowane zgodnie ze znanymi wzorami z geometrii analitycznej, czyli

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) \pm \mathbf{q}(t) &= [x_p(t) \pm x_q(t), y_p(t) \pm y_q(t)] \\ a \mathbf{p}(t) &= [a x_p(t), a y_p(t)].\end{aligned}$$

Gdzie a jest liczbą rzeczywistą. Odcinki są oznaczane parami symboli punktów zapisywanymi obok siebie np. **AB**, natomiast ich długość nawiąsami prostymi np. $|\mathbf{AB}|$.

Literatura

- [1] P. Kiciak, *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni*, WNT Warszawa 2000.
- [2] M Jankowski, *Elementy grafiki komputerowej*, WNT Warszawa 1990.
- [3] https://pl.wikipedia.org/wiki/Lista_krzywych
- [4] https://pl.wikipedia.org/wiki/Krzywa_B-sklejana